

NORMALIDADE E CORRELAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES GPS

Mestrando Alberto Luis da Silva¹
Prof.^a Dr.^a Verônica Maria Costa Romão²
Prof. Dr. Tarcísio Ferreira da Silva³
Prof. Dr. Antônio Simões Silva⁴
Prof. Dr. Robert Wayne Samohyl⁵

¹ Universidade Federal de Pernambuco – UFPE – Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação – silvabeto@zipmail.com.br

^{2,3} Universidade Federal de Pernambuco – UFPE – Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação – vcosta@ufpe.br, tarcisiofs@yahoo.de

⁴ Universidade Federal de Viçosa – UFV – Departamento de Engenharia Civil – asimoes@ufv.br

⁵ Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC – Departamento de Engenharia de Produção – samohyl@deps.ufsc.br

RESUMO:

Com a utilização cada vez maior do Sistema de Posicionamento Global (GPS), na determinação precisa de posições, torna-se de fundamental importância a consideração de alguns fatores que, ao serem negligenciados, podem prejudicar a qualidade dos resultados. No processamento e ajustamento das observações GPS utilizando o método dos mínimos-quadrados, considera-se que as observações têm propriedade de ruído branco, ou seja, são não-correlacionadas e são normalmente distribuídas. Nem sempre essas propriedades são satisfeitas, principalmente quando as observações são obtidas com intervalos de gravação muito pequenos, no caso da autocorrelação, ou através do processamento de longas linhas de base, no caso da distribuição normal. O objetivo deste artigo é verificar a presença de autocorrelação nos resíduos do processamento da linha de base, com o método dos mínimos-quadrados, e analisar seu efeito na precisão das coordenadas, quando ela passa a ser considerada. Será realizada também, através dos momentos empíricos e testes estatísticos, a verificação da distribuição das observações, no que diz respeito a sua normalidade.

Palavras-chaves: GPS, Autocorrelação, Não-normalidade.

NORMALITY AND CORRELATION OF THE GPS OBSERVATION

ABSTRACT

With the increasing use of the Global Positioning System (GPS), in the determination of precise positions, it becomes of fundamental importance the consideration of some factors, that when neglected, they can decrease the quality of the results. In the processing and adjustment of the GPS observations using the method of the least-squares, it is considered that the observations have the property of white noise; in other words, they are non-correlated and that they are normally distributed. Not always those properties are satisfied, mainly when the observations are obtained with a very small recording intervals, in the case of the autocorrelation, or through the processing of long baselines, in the case of the normal distribution. The objective of this article is to verify the presence of autocorrelation in the residuals of the processing of the baseline, with the least-squares method, and to analyze its effect in the precision of the coordinates, when it is considered. The normality of the residuals is also verified through the empirical moments and statistical tests.

Keywords: GPS, Autocorrelation, Non-normality

1 INTRODUÇÃO

A utilização do Sistema de Posicionamento Global (GPS) tornou-se a principal técnica empregada no posicionamento geodésico graças a sua facilidade de manuseio e a não necessidade de intervisibilidade entre os pontos, principalmente no caso de implantação de redes geodésicas. Mas, será que a precisão

das coordenadas obtidas com o sistema GPS, são realmente confiáveis ao nível de precisão que se tem anunciado?

Alguns fatores são negligenciados no processamento das observações GPS, colocando a qualidade dos resultados sob suspeita. Um desses fatores é a autocorrelação das observações, que podem estar presente devido, entre outros, ao processamento interno das observáveis no receptor (Borre & Tiberius, 2000), e/ou devido a diferentes condições atmosféricas percorridas pelo sinal GPS. Uma outra característica que é assumida no processamento e ajustamento das observações GPS, é quanto à estocasticidade dos resíduos, o que, às vezes, pode não ser satisfeita, principalmente quando se processam longas linhas de base. Essas considerações podem influenciar na qualidade do resultado, ou seja, na qualidade das coordenadas finais.

As observações GPS, assim como a maioria das observações geodésicas, são processadas utilizando o algoritmo dos mínimos-quadrados, em que normalmente este algoritmo não considera a autocorrelação das observações de ruído. No modelo estocástico das observáveis, ou seja, na definição de sua matriz variância-covariância, normalmente se supõe que todas as observáveis apresentam iguais características de ruído e que elas não variam com o tempo, ou seja, o processo randômico é considerado estacionário. Além disso, consideram se também que os ruídos são brancos, ou seja, duas observações realizadas em duas épocas consecutivas são não correlacionadas entre si.

O objetivo deste artigo é, no contexto de posicionamento relativo preciso GPS, verificar a presença de autocorrelação nos resíduos oriundos do processamento das linhas de base realizado pelo método dos mínimos quadrados, e analisar este efeito na precisão das coordenadas obtidas, quando considerado. Além disso, será feita uma verificação quanto à normalidade das observações GPS, utilizando o terceiro e o quarto momentos amostrais, e aplicando os testes estatísticos de Komogorov-Smirnov e Anderson-Darling.

2 AJUSTAMENTO DAS OBSERVAÇÕES PELO MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Sabemos que todas as observações conduzidas pelo homem, contêm erro. Daí a necessidade de se realizar mais de uma medida, com o objetivo de, a partir de uma pluralidade de dados, obtermos um valor que mais se aproxima do valor real. É a partir deste pressuposto que se utiliza o método dos mínimos quadrados que tem como princípio fundamental a minimização da soma dos quadrados dos resíduos, ou seja:

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 = \min, \text{ onde } v_i = x - l_i \quad (1)$$

onde v_i são os resíduos que quando somados com os valores observados l_i , reproduzem o valor estimado x .

Como as observações GPS, assim como todas as outras medições, possuem erros, é preciso realizar um ajustamento a partir das observações redundantes, com o objetivo de se extrair um resultado único e consistente. O modelo de ajustamento utilizado no processamento de observações GPS, é o ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, baseado sobre equações onde as observações são expressas como uma função dos parâmetros. Este modelo é dito paramétrico e é definido a partir da seguinte expressão:

$$L_a = F(X_a) \quad (2)$$

onde os valores observados ajustados podem ser expressos como função dos parâmetros ajustados. A partir desta expressão acima, obtemos o modelo matemático linearizado de Gauss-Markov do método dos parâmetros:

$$V = AX + L \quad (3)$$

sendo A a matriz design (ou matriz dos coeficientes) formada pelas derivadas parciais

$$A = \frac{\partial F}{\partial X_a} \Bigg|_{X_o, L_b} \quad (4)$$

e L a diferença entre as observações aproximadas e as observações brutas

$$L = L_o - L_b \quad (5)$$

Minimizando a forma quadrática fundamental, obtemos o valor de X

$$X = -(A^T P A)^{-1} A^T P L \quad (6)$$

onde P corresponde a matriz dos pesos e X corresponde a correção que devemos realizar sobre os parâmetros aproximados X_0 .

$$X_a = X_0 + X \quad (7)$$

Após a determinação dos parâmetros de interesse, utiliza-se um modelo estocástico para determinar a precisão destes, através da matriz variância-covariância, \sum_{X_a} , a partir da seguinte expressão:

$$\sum_{X_a} = \sigma_0^2 (A^T P A)^{-1} \quad (8)$$

onde σ_0^2 é a variância a posteriori da unidade de peso (Gemael, 1994).

3 ANÁLISE DA DISTRIBUIÇÃO DOS DADOS

3.1 MOMENTO AMOSTRAL

Momentos são características da função densidade de probabilidade, sendo que os dois primeiros, média (m_1) e desvio padrão (s) especificam completamente a distribuição normal. Além destes dois, existem o terceiro momento e o quarto momento, denominados assimetria (skewness) e curtose (kurtosis) respectivamente, que são utilizados para analisar a normalidade da distribuição, e são obtidos a partir da razão de momentos, e por isso, definido como momentos padronizados (Tiberius & Borre, 1999).

3.1.1 Coeficiente de assimetria (skewness)

O coeficiente de assimetria ($\sqrt{b_1}$) é uma medida de simetria, ou seja, ela indica o quanto a distribuição é assimétrica. A distribuição normal é simétrica em torno de sua média, e portanto o coeficiente de assimetria, neste caso, é aproximadamente zero. Para um nível de significância desejado, é obtido através de tabelas, o valor crítico do coeficiente, definindo uma região onde se julga ser normal, caso o coeficiente de assimetria esteja dentro desta.

A equação que define o coeficiente de assimetria é a seguinte (Tiberius & Borre, 1999):

$$\sqrt{b_1} = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m_1)^3}{\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m_1)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{onde N é o número de resíduos.} \quad (9)$$

3.1.2 Coeficiente de curtose (kurtosis)

O coeficiente de curtose (b_2) mede a relação entre a cauda e o pico de uma distribuição, e assume o valor 3 para uma distribuição normal. Assim como o coeficiente anterior, ele também possui uma região crítica, definido a partir de um nível de significância desejado e obtido através de tabela. Caso o coeficiente de curtose esteja localizado nesta região, considera-se que a distribuição estudada segue uma distribuição normal.

A equação que define o coeficiente de curtose é a seguinte (Tiberius & Borre, 1999):

$$b_2 = \frac{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m_1)^4}{\left(\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m_1)^2 \right)^2} \quad (10)$$

3.1.3 Teste de normalidade nos resíduos: Bera-Jarque

O teste estatístico de Bera-Jarque, utiliza os momentos amostrais assimetria e curtose e tem como objetivo testar a normalidade dos resíduos. Ele segue a distribuição do qui-quadrado, e tem a seguinte forma com dois graus de liberdade:

$$N \left[\frac{\text{ass}^2}{6} + \frac{(\text{curt} - 3)^2}{24} \right] \approx \chi_2^2 \geq 5,99 \quad (11)$$

onde N é o tamanho da amostra. Para dois graus de liberdade, caso a parte esquerda da equação for maior ou igual a 5,99, então indica não-normalidade.

4 CORRELAÇÃO SERIAL

4.1 SÉRIE ESTACIONÁRIA

Quando uma série de dados temporal, não apresentar tendências ou essas já estiverem sido removidas, dizemos que se trata de uma série estacionária. Para melhorar o conceito de estacionariedade, consideremos a série Z_1, Z_2, \dots, Z_N com N variáveis aleatórias tendo distribuição conjunta $f(Z_1, Z_2, \dots, Z_N)$ e distribuições marginais $f(Z_1), \dots, f(Z_N)$. Daí, a série é dita estacionária se para qualquer instante de tempo t e qualquer m, tivermos (Morettin & Pedro, 1987)

$$f(z_t) = f(z_{t+m}) \quad \text{ou} \quad (12)$$

$$f(z_t, z_{t+1}) = f(z_{t+m}, z_{t+m+1}), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots$$

ou seja, as distribuições de Z_1, Z_2, \dots, Z_N , são invariantes por translações no tempo e conseqüentemente a média e a variância são constantes, independente do instante t.

4.2 AUTOCOVARIÂNCIA E AUTOCORRELAÇÃO

Consideremos as observações Z_1, Z_2, \dots, Z_N de uma série temporal. A função de autocovariância, γ_j , entre os pares de observações de lag j (ou período j ou ordem j) da série temporal é :

$$\gamma_j = \text{cov}(Z_t, Z_{t+j}) = \text{cov}(Z_{t+m}, Z_{t+m+j}) \quad (13)$$

onde m é um valor inteiro. Supondo que a série seja estacionária, isto é, não há tendência presente ou essa tendência já foi removida preliminarmente, a função de autocovariância (γ_j) torna-se (Borre & Tiberius, 1999):

$$\gamma_j = E\{(Z_t - \mu)(Z_{t+j} - \mu)\} \quad (14)$$

A autocovariância depende somente da diferença de tempo entre o instante t+j e t, e essa diferença é chamada lag.

Uma importante ferramenta para analisar as propriedades de uma série temporal é fornecida por uma série de quantidades chamada coeficientes de autocorrelação amostral, a qual mede a correlação entre observações separadas por diferentes distâncias (lags). A função de autocorrelação é definida como (Borre & Tiberius, 1999):

$$\rho(j) = \frac{\gamma(j)}{\gamma(0)} \quad (15)$$

e representa o coeficiente de correlação entre pares de $Z(t)$ e $Z(t+j)$, separados por um intervalo j . A autocovariância para lag zero é:

$$\gamma(0) = \sigma^2 \quad (16)$$

é a variância da série Z_i .

Para ajudar a interpretar um conjunto de coeficientes de autocorrelação, utiliza-se um gráfico chamado correlograma mostrado na figura 1 (Borre & Tiberius, 2000), no qual $\rho(\tau)$ está em função do lag (s):

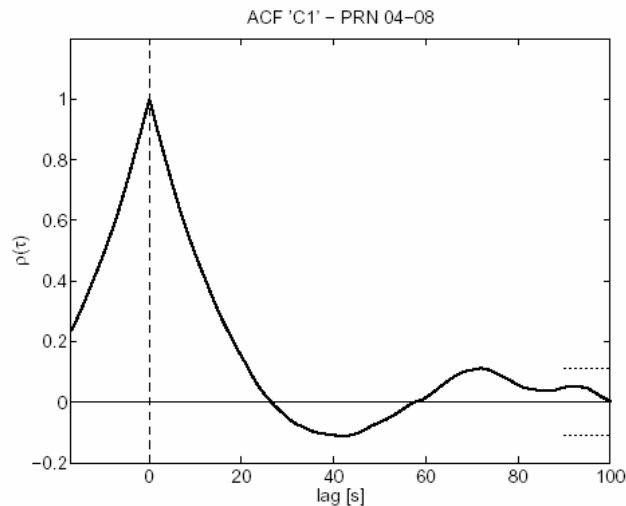


Figura 1: Coeficientes de autocorrelação amostral para o código C1 dos satélites PRN04-08

Repare que a autocorrelação para lag (0) é igual a 1, ou seja, quando o intervalo entre duas observações é igual a zero, considera-se a mesma observação, e portanto, autocorrelação 1. No caso acima, a medida que aumenta o intervalo entre observações, a autocorrelação diminui tendendo para zero. Isso é uma característica de séries estacionárias.

5 EXPERIMENTO

Foi realizado no campus da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), observações GPS utilizando um par de receptores RASCAL de dupla frequência, com taxa de gravação de 1 segundo e duração de 37'33" observando 2254 épocas. Os dois receptores foram instalados em dois pontos com coordenadas conhecidas, observando assim, uma linha de base curta de aproximadamente 4 metros, onde no processamento relativo utilizando a simples diferença, os efeitos da refração atmosférica (troposférica e ionosférica) praticamente se cancelam, assim como os efeitos do multicaminhamento que são minimizados, resultando assim, na seguinte equação para simples diferenças da pseudodistância:

$$\Delta PD = \Delta \rho + c\Delta tr + v \quad (17)$$

onde ΔPD é a diferença da pseudodistância, $\Delta \rho$ é a diferença da distância geométrica entre o receptor e o satélite, c é a velocidade da luz, Δtr é a diferença do erro do relógio dos receptores e v os resíduos, onde se incluem os erros aleatórios e erros sistemáticos não modelados.

O processamento das linhas de base, juntamente com a obtenção dos resíduos do ajustamento, foi realizado utilizando uma rotina desenvolvida no Matlab, e tinha como dados de entrada, os arquivos de observação e navegação no formato rinex.

As análises são feitas sobre os resíduos dos mínimos-quadrados de um ajustamento, onde se conhecem as coordenadas dos pontos, e tem como incógnita a diferença do erro do relógio dos receptores. Com isso, para cada época observada, para cada tipo de observação, para cada satélite, terá uma equação de observação, com seu respectivo resíduo. Processando e ajustando essas linhas de base, utilizando o método dos mínimos-quadrados, obtém-se uma série temporal dos resíduos, conforme mostra a figura 2 abaixo:

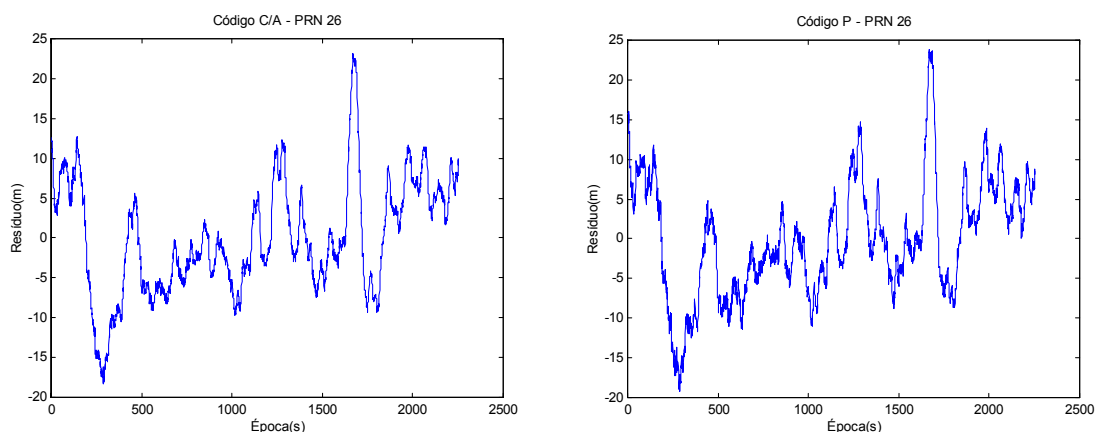


Figura 2 : Série temporal dos resíduos, para o satélite PRN26, utilizando código C/A a esquerda, e código P a direita.

O comportamento dos resíduos para os demais satélites são similares, não havendo portanto necessidade em sua visualização.

5.1 DISTRIBUIÇÃO DAS OBSERVAÇÕES GPS

Para analisar a distribuição de probabilidade dos dados GPS, utiliza-se os resíduos do processamento das linhas de base mostrado na figura 2, através do teste estatístico de Bera-Jarque. Para isso, primeiramente é preciso calcular os momentos amostrais assimetria e curtose e depois calcular o Bera-Jarque. As tabelas abaixo, mostram os momentos em metros, calculados a partir dos resíduos de cada satélite, para cada tipo de observação:

Tabela 1: Momento amostral do código C/A

Momento	Código C/A				
	PRN26	PRN29	PRN10	PRN28	PRN7
Média- m (m)	$-6,858 \times 10^{-14}$	$-4,812 \times 10^{-14}$	$-6,153 \times 10^{-14}$	$-6,594 \times 10^{-14}$	$1,066 \times 10^{-13}$
Desv. Padrão- σ (m)	7,1530	7,1831	7,2476	7,2684	7,2370
Assimetria- $\sqrt{b_1}$ (m)	0,2559	0,2579	0,1414	0,2451	0,2204
Curtose- b_2 (m)	3,1658	3,1646	3,2782	3,2596	3,0808
Bera-Jarque	27,182	27,531	14,780	28,897	18,862

Tabela 2: Momento amostral do código P

Momento	Código P				
	PRN26	PRN29	PRN10	PRN28	PRN7
Média- m (m)	$1,119 \times 10^{-13}$	$6,629 \times 10^{-14}$	$3,334 \times 10^{-14}$	$-6,716 \times 10^{-14}$	$-3,747 \times 10^{-14}$
Desv. Padrão- σ (m)	7,3244	7,2981	9,4614	7,0541	7,0079
Assimetria- $\sqrt{b_1}$ (m)	0,2784	0,2382	0,1973	0,2961	0,3405
Curtose- b_2 (m)	3,2574	3,3227	2,8240	3,2058	3,2451
Bera-Jarque	35,339	31,095	17,533	36,914	49,197

Comparando os valores calculados de Bera-Jarque para cada satélite, utilizando cada observação, com o valor tabelado da distribuição do qui-quadrado para 2 graus de liberdade, verifica-se a princípio que a distribuição das observações dos códigos C/A e P, para pequenas linhas de base, tendem a seguir uma distribuição de não-normalidade.

5.2 CORRELAÇÃO SERIAL

Utilizando os resíduos do ajustamento das linhas de base, além da função de autocorrelação definida anteriormente, obtém-se os valores da correlação serial, mostrada na Figura 3 através de seu correlograma:

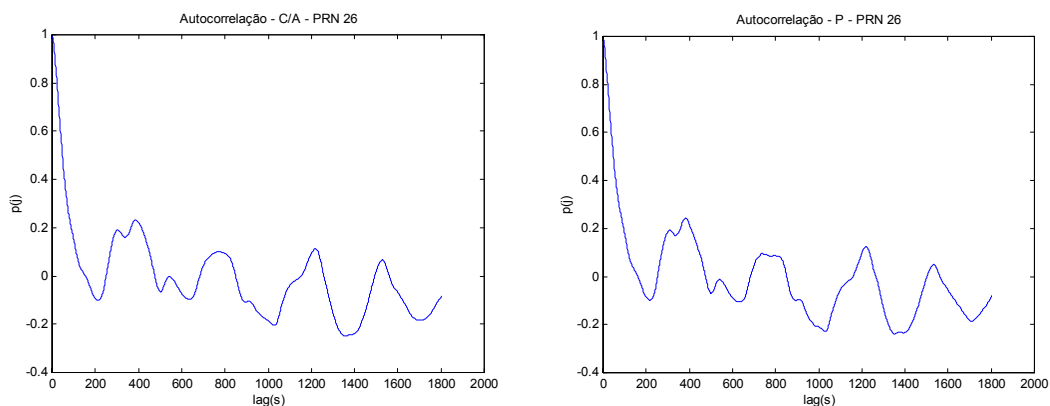


Figura 3: Função autocorrelação dos resíduos, para o satélite PRN26, utilizando o código C/A a esquerda e o código P a direita.

Os correlogramas para os demais satélites, são similares, não havendo portanto, necessidade em visualizá-los.

Analisando os correlogramas, verifica-se que a correlação parte de valores altos para pequenos lags, conforme esperado, mas, não decresce rapidamente tendendo a zero, pelo contrário, fica oscilando em torno de zero diminuindo lentamente, característica essa de séries não-estacionárias. Portanto, a princípio chega-se a uma conclusão de que as observações de código GPS para pequenas linhas de base são correlacionadas, não obedecendo portanto a propriedade de ruído branco.

6 CONCLUSÃO

Dados de um levantamento simultâneo entre dois receptores GPS de dupla-frequência, distantes 3,9 metros, foram utilizados para analisar o comportamento da distribuição dos resíduos do processamento das linhas de base. Estes resíduos, foram obtidos através de um ajustamento pelo método dos mínimos quadrados, a partir das equações de observações obtidas de um processamento, utilizando a simples diferença dos códigos.

Utilizando o teste estatístico de Bera-Jarque, verificou-se que a distribuição dos resíduos obtidos a partir dos códigos C/A e P para todos os satélites considerados, não seguem a princípio uma distribuição normal. Isso mostra que, no futuro talvez seja melhor utilizar outro modelo de distribuição para as observações GPS.

Outra análise que foi realizada neste artigo, é quanto a afirmativa de que as observações GPS, originam de um processo de ruído branco, isto é, amostras são puramente aleatórias. O que foi verificado para as observações realizadas a uma taxa de coleta de 1 segundo, é que houve correlação entre os resíduos, e isso, pode ser visto através dos correlogramas mostrados. Esta correlação implica que a covariância entre épocas necessita ser introduzidas na matriz variância-covariância das observações.

No entanto, foi realizado apenas um experimento e utilizando somente as observações dos códigos. Esta pesquisa encontra-se em desenvolvimento onde se utilizará além das observações de código C/A e P, as fases L1 e L2 das ondas portadoras, com o intuito de ter conclusões mais firmes a respeito da distribuição e correlação dos resíduos.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BORRE, K.; TIBERIUS, C.: **Time Series Analysis of GPS Observables**, Proc. of the 13th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation, Salt Lake City, Utah, September 19-22, 2000, pp. 1885-1894 (2001).

CHATFIELD, C.: **The analysis of time series, an introduction**, CHAPMAN & HALL, 1996.

GEMAEL, C. **Introdução ao ajustamento de observações: aplicações geodésicas**, Editora da UFPR, Curitiba, 1994.

MONICO, J.F.G.: **Posicionamento pelo NAVSTAR-GPS: Descrição, fundamentos e aplicações**, UNESP, Presidente Prudente, 2000.

MORETTIN, P.A.; TOLOI, C.M.: **Séries temporais**, Editora Atual, São Paulo, 1987.

STRANG, G.; BORRE, K.: **Linear algebra, geodesy and GPS**. Wellesley-Cambridge Press. 1997.

TIBERIUS, C.C.J.M.; BORRE, K.: **Are GPS data normally distributed?**, International Association of Geodesy Symposia; 121, pp. 243-248, Berlin, 2000.

TIBERIUS, C.C.J.M.; BORRE, K.: **Probability distribution of GPS code and phase data**. Zeitschrift für Vermessungswesen, 1999. 124(8): 264-273.